Комбинаторика

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

21 сентября 2009

Сколько всего ...?

- комбинаций n признаков, где i-й признак имеет p_i значений?

Сколько всего ...?

- комбинаций n признаков, где i-й признак имеет p_i значений?

$$\prod_{i=1}^{n} p_i$$

Сколько всего ...?

- комбинаций n признаков, где i-й признак имеет p_i значений?

$$\prod_{i=1}^{n} p_i$$

- то же, но при $\forall i : p_i = p$?

Сколько всего . . . ?

- комбинаций n признаков, где i-й признак имеет p_i значений?

$$\prod_{i=1}^{n} p_i$$

- то же, но при $\forall i : p_i = p$?

$$p^n$$

Сколько всего ...?

- комбинаций n признаков, где i-й признак имеет p_i значений?

$$\prod_{i=1}^{n} p_i$$

- то же, но при $\forall i : p_i = p$?

$$p^n$$

- подмножеств множества, состоящего из n элементов?

Сколько всего ...?

- комбинаций n признаков, где i-й признак имеет p_i значений?

$$\prod_{i=1}^{n} p_i$$

- то же, но при $\forall i : p_i = p$?

$$p^n$$

- подмножеств множества, состоящего из n элементов?

$$2^n$$

Алгоритм генерации подмножеств

- Представим подмножество битовым вектором:
  0 — если элемент отсутствует,
  1 — если элемент присутствует.
- Начнем с нулевого вектора.
- Рассматривая вектор как двоичное число, будем на каждом шаге прибавлять к нему 1.
- После каждого шага выводим подмножество, соответствующее текущему состоянию битового вектора.

Сколько всего ...?

- перестановок n элементов?

Сколько всего ...?

- перестановок n элементов?

$$n!$$

Сколько всего ...?

- перестановок n элементов?

$$n!$$

- а если есть повторяющиеся элементы?

Сколько всего ...?

- перестановок n элементов?

$$n!$$

- а если есть повторяющиеся элементы?

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Алгоритм генерации перестановок

На входе: отсортированный массив $a[N]$

Итерация алгоритма:

1. найти первый с конца элемент $a[i]$ такой, что $a[i] < a[i+1]$;
2. найти первый с конца элемент $a[j]$ такой, что $a[i] < a[j]$;
3. обменять $a[i]$ и $a[j]$;
4. отсортировать подмассив $a[i+1..N-1]$;
5. вывести массив a как очередную перестановку.

Алгоритм завершается, когда на шаге (1) элемент $a[i]$ не может быть найден, т. е. массив отсортирован по убыванию.

Сколько всего ...?

- k-элементных подмножеств (сочетаний) n-элементного множества?

Сколько всего . . . ?

- k-элементных подмножеств (сочетаний) n-элементного множества?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Сколько всего ...?

- k-элементных подмножеств (сочетаний) n-элементного множества?
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- упорядоченных k-элементных поднаборов (размещений) n-элементного множества?

Сколько всего …?

- k-элементных подмножеств (сочетаний) n-элементного множества?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- упорядоченных k-элементных поднаборов (размещений) n-элементного множества?

$$A_n^k = C_n^k k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

$$100!$$

Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

$$100!$$

Сколькими способами могут быть распределены золотые медали, если золотую медаль могут дать более чем одной команде?

Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

$$100!$$

Сколькими способами могут быть распределены золотые медали, если золотую медаль могут дать более чем одной команде?

$$2^{100} - 1$$

Пример 2

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

Пример 2

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

$$8!$$

Пример 3

Сколько различных слов можно составить из букв слова `abracadabra`?

Пример 3

Сколько различных слов можно составить из букв слова `abracadabra`?

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83160$$

Пример 4

В магазине есть 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 10 пирожных?

Пример 4

В магазине есть 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 10 пирожных?

$$C_{12}^{2} = 66$$