

Отношения, порядки

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

26 октября 2009

Определения

- n -арное отношение (n -ary relation) — это

$$R = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \subset M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n, \quad \text{где } x_i \in M_i.$$

- Будем рассматривать бинарные отношения на одном множестве:

$$R = \{(x_1, x_2)\} \subset M \times M.$$

- Бинарное отношение R на конечном множестве M ($|M| = n$) эквивалентно таблице $T[n \times n]$:

$$T[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } (m_i, m_j) \in R, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Свойства отношений

- Симметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$$

- Антисимметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \&\& \ (x_2, x_1) \in R \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Рефлексивность:

$$(x, x) \in R$$

- Анtireфлексивность:

$$(x, x) \notin R$$

- Транзитивность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \&\& \ (x_2, x_3) \in R \Rightarrow (x_1, x_3) \in R$$

Особые виды отношений

- Рефлексивное симметричное транзитивное — отношение эквивалентности
- Антисимметричное транзитивное — отношение (частичного) порядка (\prec)
 - рефлексивное — нестрогий порядок (\leq)
 - антирефлексивное — строгий порядок ($<$)
 - полное — линейный порядок

Порядки

- Пусть \prec — частичный порядок на M .
- Минимальный элемент $x \in M$:
не существует $y \in M$ такого, что $y \prec x$.
- Наименьший элемент $x \in M$:
для всех $y \in M$ выполняется $x \prec y$.
- Максимальный и наибольший элемент — аналогично.

Транзитивное замыкание

Алгоритм построения транзитивного замыкания (Уоршелл, 1962):
допускает произвольное отношение до транзитивного.

```
int i, j, k;
for (k = 0; k < n; ++k) {
    for (i = 0; i < n; ++i) {
        for (j = 0; j < n; ++j) {
            if (T[i, k] && T[k, j]) {
                T[i, j] = 1;
            }
        }
    }
}
```