Самобалансирующиеся деревья поиска

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

22 марта 2010

Сбалансированность

- Сбалансированное дерево — дерево, в котором заполнены все уровни, возможно кроме последнего.
- Чем ближе дерево поиска к сбалансированному, тем эффективнее операции с ним: $O(\log_k n)$.
- Добавление или удаление элементов дерева поиска легко нарушает сбалансированность.
- Поддержание идеальной сбалансированности слишком дорого.
- На практике довольствуются «почти сбалансированными» деревьями.

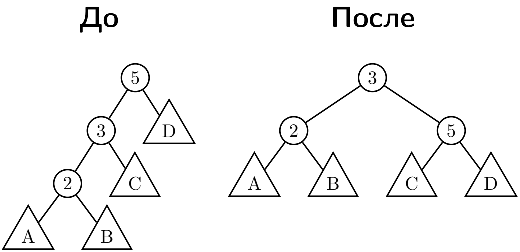
АВЛ-дерево

- Адельсон-Вельский и Ландис, 1962 г.
- АВЛ-дерево — двоичное дерево поиска.
- Критерий сбалансированности: высоты левого и правого поддеревьев любого узла различаются не более чем на единицу.
- Показатель сбалансированности узла — высота правого поддерева минус высота левого поддерева.
- При любом числе узлов высота АВЛ-дерева превосходит высоту идеально сбалансированного дерева не более чем на 45%.
- Наихудший случай АВЛ-дерева — дерево Фибоначчи.
- Количество узлов в дереве Фибоначчи — числа Леонарда.

АВЛ-дерево: балансировка

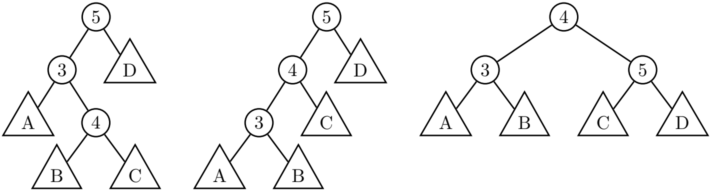
- После обычной вставки или удаления элемента проверяем все узлы на пути к корню на предмет нарушения балансировки (показатель сбалансированности ± 2).
- При нарушении сбалансированности применяем одно из четырех *вращений*: LL, LR, RR, RL.
- LL симметрично RR; LR симметрично RL.

АВЛ-дерево: LL-вращение



АВЛ-дерево: LR-вращение

До **В процессе** **После**



Красно-чёрное дерево

- Rudolf Bayer, 1972 г. (symmetric binary B-tree)
- Leonidas J. Guibas и Robert Sedgewick, 1978 г.
- Красно-чёрное дерево — двоичное дерево поиска.
- Каждый узел помечен цветом: красным или чёрным.
- Определение:
  1. Все листья чёрные.
  2. Все потомки красных узлов чёрные.
  3. Чёрные высоты всех листьев равны.
- Следствие: высоты листьев красно-чёрного дерева отличаются не более чем в два раза.

Красно-чёрное дерево: добавление элемента

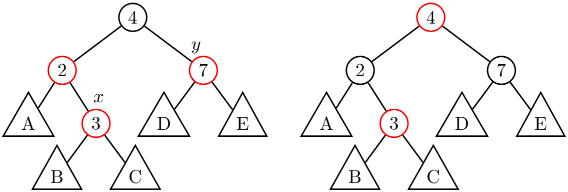
- Добавляем элемент как красный узел с двумя пустыми чёрными листьям.
- Могло нарушиться свойство (2), если родитель нового узла тоже красный.
- Возможны шесть случаев, три из них симметричны трём другим. Устраняем нарушение, двигаемся к корню, снова проверяем свойство (2).

- Удаление элемента — разобрать самостоятельно

Красно-чёрное дерево: добавление элемента (1)

- Текущий красный узел x является ребёнком красного узла, его дядя y тоже красный.

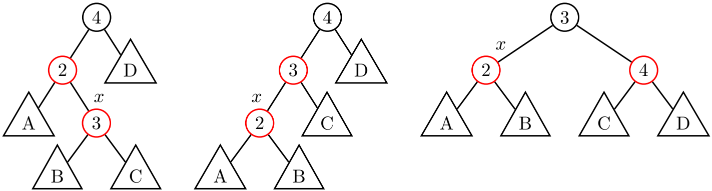
До **После**



Красно-чёрное дерево: добавление элемента (2, 3)

- Текущий красный узел x является правым (2) или левым (3) ребёнком красного узла, его дядя y чёрный.

До (2) **До (3)** **После**



B-дерево

- Rudolf Bayer и Edward McCreight, 1972 г.
- B-дерево — $2t$-ичное дерево поиска ($t \approx 10^3$), предназначенное для хранения больших объемов данных во внешней памяти.
- Все листья находятся на одной и той же высоте.
- Число ключей в любой вершине, кроме корня, находится в диапазоне $t - 1 \leq k \leq 2t - 1$, где $t \geq 2$ — заданная минимальная степень B-дерева.
- В корне B-дерева может находиться от одного до $2t - 1$ ключей.

B-дерево: добавление элемента

- Проход от корня к месту вставки
- Расщепление встретившихся по пути полных узлов
- Ключ-медиана расщепленного узла отправляется к родителю
- Рост возможен только за счет расщепления корня

- Удаление элемента — разобрать самостоятельно