

# Графы

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

12 апреля 2010

# Классические задачи теории графов

- Задача о Кёнигсбергских мостах (Эйлер, 1736 г.).
- Задача о трёх домах и трёх колодцах (1930 г.).
- Задача о четырёх красках (1852–1976 гг.).

# Определения

- Граф — пара  $(V, E)$ , где  $V$  — множество вершин,  $E \subset V \times V$  — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).
- Ориентированный граф (орграф) — пара  $(V, E)$ , где  $V$  — множество вершин,  $E \subset V \times V$  — множество упорядоченных пар различных вершин (дуг).
- Псевдограф — граф с петлями.
- Мультиграф — граф с кратными рёбрами.
- Гиперграф — граф с гиперрёбрами.
- Помеченный граф — граф с метками на вершинах и/или рёбрах.

# Определения

- Ребро  $(u, v)$  *инцидентно* вершинам  $u$  и  $v$ .
- Вершина  $v$  *смежна* с вершиной  $u$ , если есть ребро  $(u, v)$ .
- Степень вершины — количество инцидентных ей рёбер.
- Путь из вершины  $v_1$  в вершину  $v_k$  — последовательность попарно смежных вершин  $v_1, \dots, v_k$ .
- Цикл — путь, в котором  $v_1 = v_k$ .
- Граф *связен*, если между любой парой вершин существует путь.
- Дерево (без выделенного корня) — связный ациклический граф.

# Представление графов в программе

Матрица смежности	$O( V ^2)$
Матрица инцидентности	$O( V  \cdot  E )$
Списки смежности	$O( V  +  E )$
Список рёбер	$O( E )$

# Обход графа

- 1 Пометить начальную вершину и добавить её в накопитель.
  - 2 Извлечь вершину  $v$  из накопителя и вывести её.
  - 3 Пометить и добавить в накопитель все непомяченные вершины, смежные с  $v$ .
  - 4 Перейти к п. 2.  
Алгоритм завершается, когда в п. 2 накопитель пуст.
- Обход в ширину (накопитель — очередь)
  - Обход в глубину (накопитель — стек)

# Топологическая сортировка

- Задан оргграф  $(V, E)$ . Расположить его вершины вдоль оси  $x$  так, чтобы все дуги были сонаправленны с осью  $x$ .
  - На множестве  $V$  задан частичный порядок. Построить на его основе полный порядок.
- 1 Пометить вершины с входящей степенью 0.
  - 2 Взять произвольную помеченную вершину  $v$ , вывести её и снять с неё пометку.
  - 3 Удалить из графа все инцидентные  $v$  рёбра и пометить вершины, потерявшие последнее входящее ребро.
  - 4 Перейти к п. 2.  
Алгоритм завершается, когда в п. 2 нет помеченных вершин.
  - 5 Проверка отсутствия циклов: в графе должно не остаться ни одного ребра.