Графы: поиск кратчайших путей

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

19 апреля 2010

- Дан (ор)граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Сумму чисел на рёбрах вдоль пути из вершины u в вершину v назовём длиной (весом) пути из u в v: $d(u, v)$.

- Для заданной пары вершин (s, t) найти кратчайший путь из s в t.
- Для заданной вершины s найти кратчайшие пути во все остальные вершины.
- Для каждой пары (u, v) вершин графа найти кратчайший путь из u в v.

Алгоритм Дейкстры

- Находит кратчайшие пути из s во все остальные вершины при условии неотрицательности весов всех рёбер.
- Время работы $O(|V|^2 + E)$.

1. Инициализировать все кратчайшие пути ∞.
2. Найти ближайшую к s непомеченную вершину u.
3. Пометить найденную вершину u и пересчитать кратчайшие пути с учётом исходящих из u рёбер:

$$d(s, v) = \min(d(s, v), d(s, u) + d_{u,v})$$

4. Перейти к п. 2.
   Алгоритм завершается, когда в п. 2 вершина u не найдена.

Алгоритм Беллмана — Форда

- Находит кратчайшие пути из s во все остальные вершины при условии отсутствия циклов отрицательного веса.
- Время работы $O(|V| \cdot |E|)$.

1. Инициализировать все кратчайшие пути ∞.
2. Для каждого ребра (u, v) пересчитать кратчайшие пути с учетом этого ребра:
$$d(s, v) = \min(d(s, v), d(s, u) + d_{u,v})$$
3. Выполнить п. 2 ровно $|V| - 1$ раз.
4. Проверка отсутствия отрицательных циклов: для все рёбер (u, v) должно быть $d(s, v) \leq d(s, u) + d_{u,v}$.

Алгоритм Флойда — Уоршелла

- Находит кратчайшие пути между всеми парами вершин при условии отсутствия циклов отрицательного веса.
- Время работы $O(|V|^3)$.

```
for (k = 0; k < V; ++k) {
    for (i = 0; i < V; ++i) {
        for (j = 0; j < V; ++j) {
            d(i,j) = min(d(i,j), d(i,k) + d(k,j));
        }
    }
}
```

- Проверка отсутствия отрицательных циклов: для всех i должно быть $d(i,i) \geq 0$.