Графы: поиск минимального остовного дерева

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

26 апреля 2010

- Дан граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Остовным деревом назовём связный подграф (V, S), где $S \subset E$ и $|S| = |V| - 1$.
- Вес остовного дерева — сумма весов входящих в него рёбер.

- Найти остовное дерево минимального веса.

- **Теорема.** Пусть множество V разбито на две части: U и $V \setminus U$. Пусть (u, v) — ребро минимального веса, соединяющее U и $V \setminus U$. Тогда существует минимальное остовное дерево, содержащее ребро (u, v).
- **Следствие.** Минимальное остовное дерево можно построить, по очереди добавляя минимальные рёбра, не создающие циклов.

Алгоритм Прима

- Инициализировать дерево произвольной вершиной графа.
- Найти и добавить в дерево минимальное ребро, инцидентное одной из вершин дерева.
- Повторить п. 2 ровно $|V| - 1$ раз, т. е. пока дерево не покроет все вершины графа.

- Время работы
  - при честном поиске минимального ребра — $O(|V|^2)$
  - при использовании фибоначчиевой кучи — $O(|E| + |V| \log |V|)$

Алгоритм Крускала

- Инициализировать лес всеми вершинами графа (без рёбер).
- Найти и добавить минимальное ребро, соединяющее два дерева леса.
- Повторить п. 2 ровно $|V| - 1$ раз, т. е. пока лес не станет одним деревом.

- Время работы
  - при наивной реализации — $O(|E| \log |E| + |E| \cdot |V|)$
  - при использовании оптимизированных систем непересекающихся множеств — $O(|E| \log |E|)$