

Компьютерная арифметика

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

15 сентября 2010

План лекции

- 1 Логические функции
- 2 Целочисленная арифметика
- 3 Вещественная арифметика
- 4 Символьная информация

- 1 Логические функции
- 2 Целочисленная арифметика
- 3 Вещественная арифметика
- 4 Символьная информация

Логические функции

- Булевы функции (по имени Дж. Буля)
- Параметры и результат — логические значения

истина = true = 1

ложь = false = 0

- Одноместные и двуместные функции
- Функции задаются таблицами истинности
- Количество n -местных логических функций — $2^{2^n} = 4^n$

Одноместные логические функции

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- f_0 — тождественная ложь, 0
- f_1 — тождественная функция, x
- f_2 — отрицание («не»), not , \bar{x} или $\neg x$
- f_3 — тождественная истина, 1

Двуместные логические функции

x	y	f ₀	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀	f ₁₁	f ₁₂	f ₁₃	f ₁₄	f ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0

- f₁ — конъюнкция («и»), and, &, ∧
- f₆ — исключающее «или», xor, ^, ⊕
- f₇ — дизъюнкция («или»), or, ∨
- f₈ — стрелка Пирса, ↓
- f₁₃ — импликация («если — то»), →
- f₁₄ — штрих Шеффера, |

Свойства логических функций

- Двойное отрицание:

$$\neg\neg x = x$$

- Идемпотентность:

$$x \vee x = x,$$

$$x \wedge x = x$$

- Ассоциативность:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

Свойства логических функций

- Коммутативность:

$$x \vee y = y \vee x,$$

$$x \wedge y = y \wedge x,$$

$$x \oplus y = y \oplus x$$

- Дистрибутивность:

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z),$$

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

- Законы де Моргана:

$$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y),$$

$$\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$$

Полные системы логических функций

- Все остальные функции выражаются как суперпозиция функций полной системы
- Минимальная полная система называется базисом
- Примеры полных систем:
 - $\{\vee, \wedge, \neg\}$
 - $\{\wedge, \oplus, 1\}$
 - $\{\}$ (штрих Шеффера)
 - $\{\downarrow\}$ (стрелка Пирса)

Логические операции со словами

- Побитовые версии логических функций
- Операции со словом x по маске m :

Инвертировать биты: $x = x \oplus m$

Установить биты в 0: $x = x \wedge \neg m$

Установить биты в 1: $x = x \vee m$

Выделить биты: $x = x \wedge m$

- 1 Логические функции
- 2 Целочисленная арифметика
- 3 Вещественная арифметика
- 4 Символьная информация

Двоичная и шестнадцатеричная системы счисления

- Двоичная система счисления: язык компьютера, но слишком громоздка
- Шестнадцатеричная система счисления: удобно переводить в двоичную и обратно, хорошо «ложится» на байты, компактна

0	0000	4	0100	8	1000	C	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	E	1110
3	0011	7	0111	B	1011	F	1111

Перевод числа в P -ную систему счисления и обратно

- Дано число в десятичной системе счисления; хотим перевести в P -ную.
- \Rightarrow Делим с остатком на P , выписывая остатки от деления справа налево.
- Дано число $\overline{a_k \dots a_0}$ в P -ной системе счисления; хотим перевести в десятичную.
- \Rightarrow Суммируем цифры a_i $_{i=0}^k$ с весами P^i .

Представление отрицательных чисел

- Прямой код: прост для понимания, но в нем трудно производить арифметические действия
- Обратный код: промежуточный этап между прямым и дополнительным кодами
- Дополнительный код (two's complement): не очевиден, но арифметика реализуется естественным образом
- Алгоритм получения дополнительного кода: инвертировать все биты, прибавить единицу

- 1 Логические функции
- 2 Целочисленная арифметика
- 3 Вещественная арифметика**
- 4 Символьная информация

- Стандарт IEEE 754
- Представление числа:
 - знак;
 - мантисса (нормализованная);
 - экспонента (смещенная).
- Специальные значения:
 - $\pm\infty$;
 - NaN (not a number).
- Особенности:
 - $10 * 0.1 \neq 1$;
 - $x + y = x$ при $0 < y \leq \varepsilon$.

- 1 Логические функции
- 2 Целочисленная арифметика
- 3 Вещественная арифметика
- 4 Символьная информация**

Представление символьной информации

- Процессор ничего не знает о символах; оперирует только числами.
- Кодлируем символы числами.
- ASCII — American Standard Code for Information Interchange

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.A	.B	.C	.D	.E	.F
0.	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	TAB	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1.	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2.		!	"	#	\$	%	&	'	()	*	+	,	-	.	/
3.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4.	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5.	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[\]	^	_
6.	'	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7.	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{		}	~	DEL

Представление символьной информации

- Разнообразные варианты для кодов 0x80–0xFF:
CP866, KOI-8, Windows-1251
- Проблема неправильной кодировки: «бНОПНЯ»
- Стандарт Unicode: кодовые позиции + кодировки UTF
ASCII: U+0000 – U+007F,
Кириллица: U+0400 – U+04FF, ...
Правила сортировки и преобразования
- Различные подходы к хранению длины строки: C vs Pascal.

UTF-8

U+000000-U+00007F	0.....
U+000080-U+0007FF	110..... 10.....
U+000800-U+00FFFF	1110.... 10..... 10.....
U+010000-U+1FFFFF	11110... 10..... 10..... 10.....

Рекомендуемая литература

-  Новиков Ф. А.
Дискретная математика для программистов.
СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Глава 3
-  Столяр С. Е., Владыкин А. А.
Информатика: Представление данных и алгоритмы.
СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 382 с.: ил.
// Глава В
-  Уоррен Г.
Алгоритмические трюки для программистов, испр. изд. : Пер. с англ.
М.: Вильямс, 2004. — 288 с.
-  Gillam R.
Unicode Demystified: A Practical Programmer's Guide to the Encoding Standard.
Addison-Wesley, 2003.
-  Spolsky J.
The Absolute Minimum Every Software Developer Absolutely, Positively Must Know
About Unicode and Character Sets (No Excuses!)
<http://www.joelonsoftware.com/articles/Unicode.html>