# Комбинаторика

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

29 сентября 2010

- Количество функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам.
- Количество чисел в $m$-ичной системе счисления, состоящих не более чем из $n$ цифр.

- Количество функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам.
- Количество чисел в $m$-ичной системе счисления, состоящих не более чем из $n$ цифр.

$$U(m, n) = m^n$$

- Количество функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам.
- Количество чисел в $m$-ичной системе счисления, состоящих не более чем из $n$ цифр.

$$U(m, n) = m^n$$

- Количество комбинаций $n$ признаков, где $i$-й признак имеет $m_i$ значений.

- Количество функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам.
- Количество чисел в $m$-ичной системе счисления, состоящих не более чем из $n$ цифр.

$$U(m, n) = m^n$$

- Количество комбинаций $n$ признаков, где $i$-й признак имеет $m_i$ значений.

$$U(m_1, \ldots, m_n) = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

- Количество функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам.
- Количество чисел в $m$-ичной системе счисления, состоящих не более чем из $n$ цифр.

$$U(m, n) = m^n$$

- Количество комбинаций $n$ признаков, где $i$-й признак имеет $m_i$ значений.

$$U(m_1, \ldots, m_n) = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

- Количество подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов.

- Количество функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам.
- Количество чисел в $m$-ичной системе счисления, состоящих не более чем из $n$ цифр.

$$U(m, n) = m^n$$

- Количество комбинаций $n$ признаков, где $i$-й признак имеет $m_i$ значений.

$$U(m_1, \ldots, m_n) = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

- Количество подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов.

$$S(n) = 2^n$$

# Размещения без повторений

- Количество инъективных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам, не более чем по одному в ящик.

## Размещения без повторений

- Количество инъективных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество способов разместить $n$ предметов по $m$ ящикам, не более чем по одному в ящик.

$$A(m, n) = m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

## Способы перебора размещений

- $n$ вложенных циклов ($n$ должно быть известно при компиляции)

```
for i in 1..m do
    for j in 1..m do
        for k in 1..m do print i, j, k
```

- рекурсивный перебор

```
def allocs(m, n, list)
    if list.size == n
        print list
    else
        for i in 1..m do allocs(m, n, list + i)
```

- последовательное приращение $m$-ичного числа на единицу, начиная с 0

- Количество биективных функций $f : X \to X$, где $X = \{1..n\}$.
- Количество перестановок $n$ предметов.

- Количество биективных функций $f : X \to X$, где $X = \{1..n\}$.
- Количество перестановок $n$ предметов.

$$P(n) = A(n, n) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

- Количество биективных функций $f : X \to X$, где $X = \{1..n\}$.
- Количество перестановок $n$ предметов.

$$P(n) = A(n, n) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

- Количество перестановок $n$ предметов, среди которых есть повторяющиеся.

- Количество биективных функций $f : X \to X$, где $X = \{1..n\}$.
- Количество перестановок $n$ предметов.

$$P(n) = A(n, n) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

- Количество перестановок $n$ предметов, среди которых есть повторяющиеся.

$$P(n, n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

# Рекурсивный алгоритм перебора перестановок

```
def perms(list, m)
    if m == 1
        print list
    else
        for i in 1..m do
            perms(list, m - 1)
            if i < m
                swap(list[i], list[m])
                reverse(list, m - 1)
```

# Нерекурсивный алгоритм перебора перестановок

На входе: отсортированный массив $a[N]$

Цикл:

1. найти первый с конца элемент $a[i]$ такой, что $a[i] < a[i+1]$;
2. найти первый с конца элемент $a[j]$ такой, что $a[i] < a[j]$;
3. обменять $a[i]$ и $a[j]$;
4. отсортировать подмассив $a[i+1..N-1]$;
5. вывести массив $a$ как очередную перестановку.

Алгоритм завершается, когда на шаге (1) элемент $a[i]$ не может быть найден, т. е. массив отсортирован по убыванию.

- Количество строго монотонных функций $f: X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ ящикам, не более чем по одному в ящик.

- Количество строго монотонных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ ящикам, не более чем по одному в ящик.

$$C(m, n) = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

- Количество строго монотонных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ ящикам, не более чем по одному в ящик.

$$C(m, n) = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

- Количество упорядоченных $n$-элементных поднаборов $m$-элементного множества.

- Количество строго монотонных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ ящикам, не более чем по одному в ящик.

$$C(m, n) = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

- Количество упорядоченных $n$-элементных поднаборов $m$-элементного множества.

$$A(m, n) = n!C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

# Сочетания с повторениями

- Количество монотонных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ ящикам.

# Сочетания с повторениями

- Количество монотонных функций $f : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$.
- Количество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ ящикам.
$$V(m, n) = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}$$

# Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

# Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^3 = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

# Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

# Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

$$100!$$

# Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

$$100!$$

Сколькими способами могут быть распределены золотые медали, если золотую медаль могут дать более чем одной команде?

# Пример 1

В чемпионате ACM ICPC принимают участие 100 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Предположим для простоты, что каждым видом медали награждается только одна команда. Сколькими способами могут быть распределены медали?

$$A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Сколькими способами могут быть распределены все 100 мест?

$$100!$$

Сколькими способами могут быть распределены золотые медали, если золотую медаль могут дать более чем одной команде?

$$2^{100} - 1$$

# Пример 2

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

# Пример 2

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

$$8!$$

# Пример 3

Сколько различных слов можно составить из букв слова `abracadabra`?

## Пример 3

Сколько различных слов можно составить из букв слова `abracadabra`?

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83160$$

# Пример 4

В магазине есть 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 10 пирожных?

# Пример 4

В магазине есть 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 10 пирожных?

$$C_{12}^{2} = 66$$

# Рекомендуемая литература


- Виленкин Н.
  Комбинаторика.
  М.: Наука, 1969. — 328 с.: ил.
- Липский В.
  Комбинаторика для программистов: Пер. с польск.
  М.: Мир, 1988. — 213 с.: ил. // Глава 1
- Новиков Ф. А.
  Дискретная математика для программистов.
  СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Глава 5
- Романовский И. В.
  Дискретный анализ. — 3-е изд., перераб. и доп.
  СПб: Невский Диалект; БХВ Петербург, 2003. — 320 с.: ил.
  // Глава 2