Отношения, порядки

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

3 ноября 2010

Определения

- n-арное отношение (n-ary relation) — это

$$R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \subset M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n, \quad \text{где} \quad x_i \in M_i.$$

- Будем рассматривать бинарные отношения на одном множестве:

$$R = \{(x_1, x_2)\} \subset M \times M.$$

- Бинарное отношение R на конечном множестве M ($|M| = n$) эквивалентно таблице $T[n \times n]$:

$$T[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } (m_i, m_j) \in R, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Свойства отношений

- Симметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$$

Свойства отношений

- Симметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$$

- Антисимметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \wedge \ (x_2, x_1) \in R \Rightarrow x_1 = x_2$$

Свойства отношений

- Симметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$$

- Антисимметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \wedge \ (x_2, x_1) \in R \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Рефлексивность:

$$(x, x) \in R$$

Свойства отношений

- Симметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$$

- Антисимметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \land \ (x_2, x_1) \in R \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Рефлексивность:

$$(x, x) \in R$$

- Антирефлексивность:

$$(x, x) \notin R$$

Свойства отношений

- Симметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$$

- Антисимметричность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \wedge \ (x_2, x_1) \in R \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Рефлексивность:

$$(x, x) \in R$$

- Антирефлексивность:

$$(x, x) \notin R$$

- Транзитивность:

$$(x_1, x_2) \in R \ \wedge \ (x_2, x_3) \in R \Rightarrow (x_1, x_3) \in R$$

Особые виды отношений

- Однозначное отношение — функция
  - Инъекция: $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  - Сюрьекция: $\forall y \in Y \; \exists x \in X : \; y = f(x)$
  - Биекция — инъекция и сюрьекция одновременно.

Особые виды отношений

- Однозначное отношение — функция
  - Инъекция: $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  - Сюрьекция: $\forall y \in Y\ \exists x \in X: \ y = f(x)$
  - Биекция — инъекция и сюрьекция одновременно.
- Рефлексивное симметричное транзитивное — отношение эквивалентности

Особые виды отношений

- Однозначное отношение — функция
  - Инъекция: $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  - Сюрьекция: $\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ y = f(x)$
  - Биекция — инъекция и сюрьекция одновременно.
- Рефлексивное симметричное транзитивное — отношение эквивалентности
- Антисимметричное транзитивное — отношение (частичного) порядка ($\prec$)
  - рефлексивное — нестрогий порядок ($\leqslant$)
  - антирефлексивное — строгий порядок ($<$)
  - полное — линейный порядок

Порядки

- Пусть $\prec$ — частичный порядок на M.
- Минимальный элемент $x \in M$:
  не существует $y \in M$ такого, что $y \prec x$.
- Наименьший элемент $x \in M$:
  для всех $y \in M$ выполняется $x \prec y$.
- Максимальный и наибольший элемент — аналогично.

Транзитивное замыкание

Алгоритм построения транзитивного замыкания (Уоршелл, 1962): достраивает произвольное отношение до транзитивного.

```
int i, j, k;
for (k = 0; k < n; ++k) {
    for (i = 0; i < n; ++i) {
        for (j = 0; j < n; ++j) {
            if (T[i, k] && T[k, j]) {
                T[i, j] = 1;
            }
        }
    }
}
```

Рекомендуемая литература

- Верещагин Н. К., Шень А.
  Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств.
  М.: МЦНМО, 1999. — 128 с.
- Глушков В М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.
  Алгебра. Языки. Программирование. — 3-е изд., перераб. и доп.
  Киев : Наукова думка, 1989. — 376 с. // Главы 1–2
- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.
  Алгоритмы: построение и анализ.
  М.: МЦНМО, 1999. — 960 с., 263 ил. // Глава 5
- Новиков Ф. А.
  Дискретная математика для программистов.
  СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Глава 1