Графы

Алексей Владыкин

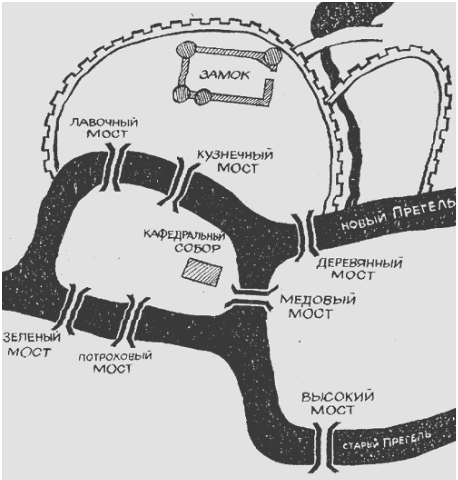
СПбГУ ИТМО

29 апреля 2011

План лекции

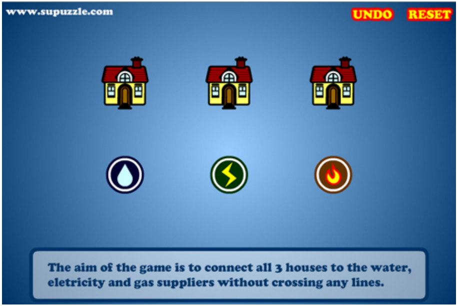
1. Исторический экскурс
2. Определения
3. Представление графов
4. Базовые алгоритмы

Задача о Кёнигсбергских мостах



- Пройти по всем мостам по одному разу
- Задача решена Эйлером в 1736 г.

Задача о трех домах и трёх колодцах



- Соединить каждый дом с каждым колодцем, чтобы линии не пересекались.
- Задача решена Куратовским в 1930 г.

Задача о четырёх красках

- Можно ли раскрасить карту четырьмя цветами так, чтобы соседние страны были окрашены в разные цвета?
- Задача сформулирована в 1852 г.
- Доказательство получено в 1976 г. при помощи компьютера

- Граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).

- Граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).
- Ориентированный граф (орграф) — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество упорядоченных пар различных вершин (дуг).

- Граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).
- Ориентированный граф (орграф) — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество упорядоченных пар различных вершин (дуг).
- Псевдограф — граф с петлями.

- Граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).
- Ориентированный граф (орграф) — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество упорядоченных пар различных вершин (дуг).

- Псевдограф — граф с петлями.
- Мультиграф — граф с кратными рёбрами.

- Граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).
- Ориентированный граф (орграф) — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество упорядоченных пар различных вершин (дуг).

- Псевдограф — граф с петлями.
- Мультиграф — граф с кратными рёбрами.
- Гиперграф — граф с гиперрёбрами.

- Граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество неупорядоченных пар различных вершин (рёбер).
- Ориентированный граф (орграф) — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество упорядоченных пар различных вершин (дуг).

- Псевдограф — граф с петлями.
- Мультиграф — граф с кратными рёбрами.
- Гиперграф — граф с гиперрёбрами.
- Помеченный граф — граф с метками на вершинах и/или рёбрах.

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.
- Вершина v *смежна* с вершиной u, если есть ребро (u, v).

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.
- Вершина v *смежна* с вершиной u, если есть ребро (u, v).
- Степень вершины — количество инцидентных ей рёбер.

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.
- Вершина v *смежна* с вершиной u, если есть ребро (u, v).
- Степень вершины — количество инцидентных ей рёбер.
- Путь из вершины v_1 в вершину v_k — последовательность попарно смежных вершин $v_1, \ldots, v_k$.

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.
- Вершина v *смежна* с вершиной u, если есть ребро (u, v).
- Степень вершины — количество инцидентных ей рёбер.
- Путь из вершины v_1 в вершину v_k — последовательность попарно смежных вершин $v_1, \ldots, v_k$.
- Цикл — путь, в котором $v_1 = v_k$.

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.
- Вершина v *смежна* с вершиной u, если есть ребро (u, v).
- Степень вершины — количество инцидентных ей рёбер.
- Путь из вершины v_1 в вершину v_k — последовательность попарно смежных вершин $v_1, \dots, v_k$.
- Цикл — путь, в котором $v_1 = v_k$.
- Граф *связен*, если между любой парой вершин существует путь.

- Ребро (u, v) *инцидентно* вершинам u и v.
- Вершина v *смежна* с вершиной u, если есть ребро (u, v).
- Степень вершины — количество инцидентных ей рёбер.
- Путь из вершины v_1 в вершину v_k — последовательность попарно смежных вершин $v_1, \ldots, v_k$.
- Цикл — путь, в котором $v_1 = v_k$.
- Граф *связен*, если между любой парой вершин существует путь.
- Дерево (без выделенного корня) — связный ациклический граф.

Матрица смежности	$O(\lvert V\rvert^2)$
Матрица инцидентности	$O(\lvert V\rvert \cdot \lvert E\rvert)$
Списки смежности	$O(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert)$
Список рёбер	$O(\lvert E\rvert)$

Обход графа

1. Пометить начальную вершину и добавить её в накопитель.
2. Извлечь вершину v из накопителя и вывести её.
3. Пометить и добавить в накопитель все непомеченные вершины, смежные с v.
4. Перейти к п. 2.
   Алгоритм завершается, когда в п. 2 накопитель пуст.

- Обход в ширину (накопитель — очередь)
- Обход в глубину (накопитель — стек)

Топологическая сортировка

- Задан орграф (V, E). Расположить его вершины вдоль оси x так, чтобы все дуги были сонаправленны с осью x.
- На множестве V задан частичный порядок. Построить на его основе полный порядок.

1. Выполнить серию поисков в глубину, чтобы обойти весь граф.
2. Отсортировать вершины по убыванию времени выхода.

Рекомендуемая литература

- Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.
  Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос.
  М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. — 384 с.: ил. // Главы 6–7
- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.
  Алгоритмы: построение и анализ.
  М.: МЦНМО, 1999. — 960 с., 263 ил. // Глава 23
- Новиков Ф. А.
  Дискретная математика для программистов.
  СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Главы 7–8
- Харари Ф.
  Теория графов.
  М.: Мир, 1973. — 300 с.