Графы: поиск кратчайших путей

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

6 мая 2011

Постановка задачи

- Дан (ор)граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.

Постановка задачи

- Дан (ор)граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Сумму чисел на рёбрах вдоль пути из вершины u в вершину v назовём длиной (весом) пути из u в v: $d(u, v)$.

Постановка задачи

- Дан (ор)граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Сумму чисел на рёбрах вдоль пути из вершины u в вершину v назовём длиной (весом) пути из u в v: $d(u, v)$.

- Для заданной пары вершин (s, t) найти кратчайший путь из s в t.

Постановка задачи

- Дан (ор)граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Сумму чисел на рёбрах вдоль пути из вершины u в вершину v назовём длиной (весом) пути из u в v: $d(u, v)$.

- Для заданной пары вершин (s, t) найти кратчайший путь из s в t.
- Для заданной вершины s найти кратчайшие пути во все остальные вершины.

Постановка задачи

- Дан (ор)граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Сумму чисел на рёбрах вдоль пути из вершины u в вершину v назовём длиной (весом) пути из u в v: $d(u, v)$.

- Для заданной пары вершин (s, t) найти кратчайший путь из s в t.
- Для заданной вершины s найти кратчайшие пути во все остальные вершины.
- Для всех вершин графа найти кратчайшие пути между ними.

Общие соображения

- Выполняется свойство оптимальности для подзадач.
- Следовательно, применимо динамическое программирование или жадные алгоритмы.

Общие соображения

- Выполняется свойство оптимальности для подзадач.
- Следовательно, применимо динамическое программирование или жадные алгоритмы.

- Все алгоритмы основаны на технике релаксации.

Общие соображения

- Выполняется свойство оптимальности для подзадач.
- Следовательно, применимо динамическое программирование или жадные алгоритмы.

- Все алгоритмы основаны на технике релаксации.
- Релаксация ребра (u, w):

$$d(s, w) = \min(d(s, w), d(s, u) + d_{u,w})$$

Алгоритм Дейкстры

- Находит кратчайшие пути из s во все остальные вершины при условии неотрицательности весов всех рёбер.
- Время работы $O(|V|^2 + E)$.

1. Инициализировать все кратчайшие пути ∞.
2. Найти ближайшую к s непомеченную вершину u.
3. Пометить найденную вершину u и сделать релаксацию всех исходящих из u рёбер.
4. Перейти к п. 2.
   Алгоритм завершается, когда в п. 2 вершина u не найдена.

Алгоритм Беллмана — Форда

- Находит кратчайшие пути из s во все остальные вершины при условии отсутствия циклов отрицательного веса.
- Время работы $O(|V| \cdot |E|)$.

1. Инициализировать все кратчайшие пути ∞.
2. Для каждого ребра (u, v) выполнить релаксацию.
3. Выполнить п. 2 ровно $|V| - 1$ раз.
4. Проверка отсутствия отрицательных циклов: для всех рёбер (u, v) должно быть $d(s, v) \leqslant d(s, u) + d_{u,v}$.

Алгоритм Флойда — Уоршелла

- Находит кратчайшие пути между всеми парами вершин при условии отсутствия циклов отрицательного веса.
- Время работы $O(|V|^3)$.

```
for (k = 0; k < V; ++k) {
    for (i = 0; i < V; ++i) {
        for (j = 0; j < V; ++j) {
            d[i,j] = min(d[i,j], d[i,k] + d[k,j]);
        }
    }
}
```

- Проверка отсутствия отрицательных циклов: для всех i должно быть $d(i,i) \geqslant 0$.

Рекомендуемая литература

- Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.
  Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос.
  М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. — 384 с.: ил. // Глава 6
- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.
  Алгоритмы: построение и анализ.
  М.: МЦНМО, 1999. — 960 с., 263 ил. // Главы 25–26
- Новиков Ф. А.
  Дискретная математика для программистов.
  СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Глава 8
- Романовский И. В.
  Дискретный анализ. — 3-е изд., перераб. и доп.
  СПб: Невский Диалект; БХВ Петербург, 2003. — 320 с.: ил.
  // Глава 8