Графы: поиск минимального остовного дерева

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

6 мая 2011

- Дан граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.

- Дан граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Остовным деревом назовём связный подграф (V, S), где $S \subset E$ и $|S| = |V| - 1$.

- Дан граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Остовным деревом назовём связный подграф (V, S), где $S \subset E$ и $|S| = |V| - 1$.
- Вес остовного дерева — сумма весов входящих в него рёбер.

- Дан граф $G = (V, E)$, рёбра которого помечены числами. Ребру (u, v) соответствует число $d_{u,v}$.
- Остовным деревом назовём связный подграф (V, S), где $S \subset E$ и $|S| = |V| - 1$.
- Вес остовного дерева — сумма весов входящих в него рёбер.

- Найти остовное дерево минимального веса.

Теорема о разрезе

Пусть множество V разбито на две части: U и $V \setminus U$. Пусть (u, v) — ребро минимального веса, соединяющее U и $V \setminus U$. Тогда существует минимальное остовное дерево, содержащее ребро (u, v).

Теорема о разрезе

Пусть множество V разбито на две части: U и $V \setminus U$. Пусть (u, v) — ребро минимального веса, соединяющее U и $V \setminus U$. Тогда существует минимальное остовное дерево, содержащее ребро (u, v).

Следствие

Минимальное остовное дерево можно построить, по очереди добавляя минимальные рёбра, не создающие циклов.

Алгоритм Прима

- Инициализировать дерево произвольной вершиной графа.
- Найти и добавить в дерево минимальное ребро, инцидентное одной из вершин дерева.
- Повторить п. 2 ровно $|V| - 1$ раз, т. е. пока дерево не покроет все вершины графа.

- Время работы
  - при честном поиске минимального ребра — $O(|V|^2)$
  - при использовании двоичной кучи — $O(|E| \log |V|)$

Алгоритм Крускала

- Инициализировать лес всеми вершинами графа (без рёбер).
- Найти и добавить минимальное ребро, соединяющее два дерева леса.
- Повторить п. 2 ровно $|V| - 1$ раз, т. е. пока лес не станет одним деревом.

- Время работы
  - при наивной реализации — $O(|E| \log |E| + |E| \cdot |V|)$
  - при использовании оптимизированных систем непересекающихся множеств — $O(|E| \log |E|)$

Рекомендуемая литература

- Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.
  Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос.
  М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. — 384 с.: ил. // Глава 7

- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.
  Алгоритмы: построение и анализ.
  М.: МЦНМО, 1999. — 960 с., 263 ил. // Глава 24

- Новиков Ф. А.
  Дискретная математика для программистов.
  СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Глава 9

- Романовский И. В.
  Дискретный анализ. — 3-е изд., перераб. и доп.
  СПб: Невский Диалект; БХВ Петербург, 2003. — 320 с.: ил.
  // Глава 8