

Деревья

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

4 марта 2011

- 1 Основные сведения
- 2 Математические свойства
- 3 Деревья поиска

Определения

- Корневое дерево — это:
 - пустое дерево;
 - отдельный узел (node);
он же является корнем (root) этого дерева;
 - узел n с поддеревьями T_1, \dots, T_k ; при этом n_1, \dots, n_k (корни T_1, \dots, T_k) — дети (children) узла n ;
 n — корень дерева и родитель (parent) узлов n_1, \dots, n_k .
- Внешняя вершина, лист (leaf) — вершина без детей.
- Внутренняя вершина — вершина с детьми.
- Ребро (edge) — связь между родителем и ребенком.
- Лес — множество деревьев.

Разновидности деревьев

- Упорядоченные деревья
- Позиционные деревья
- k-ичные деревья
- Помеченные деревья
(пометки на вершинах или на рёбрах)

Примеры

- Структура книги: главы, разделы, подразделы
- Диаграмма классов
(в языках без множественного наследования)
- Генеалогическое дерево
- Файловая система
- Дерево решений (decision tree)
- Суффиксное дерево (suffix tree)
- Префиксное дерево (prefix tree)
- Абстрактное синтаксического дерева (abstract syntax tree)

Запись деревьев

- Графическое изображение
- Структура вложенных скобок
- Список с отступами
- Круги Эйлера / диаграммы Венна

Представление деревьев в программах

- Структура на указателях, в каждом узле — указатели на детей

```
struct node_t {  
    //struct node_t* parent;  
    struct node_t* children [];  
    data_t data;  
};
```

- Структура на указателях, в каждом узле указатель на первого ребёнка и следующего брата

```
struct node_t {  
    //struct node_t* parent;  
    struct node_t* first_child;  
    struct node_t* next_sibling;  
    data_t data;  
};
```

- Для k -ичного дерева ограниченного размера — массив

- 1 Основные сведения
- 2 Математические свойства**
- 3 Деревья поиска

Дерево как отношение

- антирефлексивность;
- антирефлексивность транзитивного замыкания (ацикличность);
- антисимметричность;
- если $(i, j) \in R$, то $\forall k \neq i : (k, j) \notin R$
(требование единственности родителя).

Свойства

- Если n и e — количество узлов и рёбер, то $e = n - 1$.
- Количество свободных деревьев из n помеченных узлов $\text{trees}(n) = n^{n-2}$ (теорема Кэли).
- Количество полных двоичных деревьев с $n + 1$ листьями $\text{trees}(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ (числа Каталана).
- Количество узлов в полном k -ичном дереве высоты h $\text{nodes}(k, h) = 1 + k + k^2 + \dots + k^{h-1} = \frac{k^h - 1}{k - 1}$.

Обход дерева

- Прямой порядок (префиксный):
корень — поддереву 1 — ... — поддереву k;
- Обратный порядок (постфиксный):
поддереву 1 — ... — поддереву k — корень;
- Симметричный порядок (инфиксный):
поддереву 1 — корень — поддереву 2 — ... — поддереву k.

- 1 Основные сведения
- 2 Математические свойства
- 3 Деревья поиска**

Деревья поиска

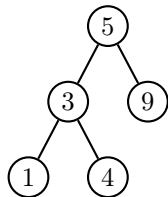
В каждой вершине дерева поиска:

- поддеревья t_1, t_2, \dots, t_r ;
- набор ключей $k_1 < k_2 < \dots < k_{r-1}$;
- все ключи поддерева t_1 меньше k_1 ;
- все ключи поддерева t_i ($1 < i < r$) между k_{i-1} и k_i ;
- все ключи поддерева t_r больше k_{r-1} .

В сбалансированном дереве поиска операции добавления, удаления и поиска ключа выполняются за $O(\log_r n)$.

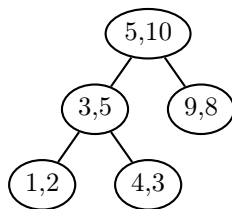
Двоичные деревья поиска

- Binary search tree, BST
- Алгоритм вставки:
 - в лист
 - в корень
- Алгоритм удаления:
 - листа
 - внутреннего узла с одним сыном
 - внутреннего узла с двумя сыновьями
- Алгоритм слияния







Декартово дерево

- Treap (tree + heap)
- По первому ключу — дерево поиска
- По второму ключу — двоичная куча
- Чем выше приоритет, тем ближе узел к корню дерева и тем эффективнее его поиск



Рекомендуемая литература

-  Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.
Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос.
М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. — 384 с.: ил. // Глава 3
-  Вирт Н.
Алгоритмы и структуры данных: Пер. с англ. — 2-е изд., испр.
СПб.: Невский Диалект, 2001. — 352 с.: ил. // Глава 4
-  Новиков Ф. А.
Дискретная математика для программистов.
СПб.: Питер, 2000. — 304 с.: ил. // Глава 9
-  Столяр С. Е., Владыкин А. А.
Информатика: Представление данных и алгоритмы.
СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,
2007. — 382 с.: ил. // Глава С