

Динамическое программирование

Алексей Владыкин

СПбГУ ИТМО

25 марта 2011

- Ричард Беллман, 1950-е гг.
- В данном контексте «программирование» значит «метод оптимизации»: см. целочисленное программирование, линейное программирование, квадратичное программирование. . .
- Принцип оптимальности
- Уравнение Беллмана

$$V(x) = \max_{a \in \Gamma(x)} \{F(x, a) + \beta V(T(x, a))\}$$

- Необходимые свойства задачи:
 - оптимальная подструктура задачи (optimal substructure)
 - перекрывающиеся подзадачи (overlapping subproblems)
- Типичные классы задач:
 - оптимизация некоторой целевой функции
 - подсчет количества решений

Наибольшая общая подпоследовательность

- Даны конечные последовательности s и t ; $|s| = m$; $|t| = n$
- Найти последовательность x наибольшей длины, являющуюся подпоследовательностью s и t
- Пусть $f(i, j)$ — длина наибольшей общей подпоследовательности s_1, \dots, s_i и t_1, \dots, t_j . Тогда

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 0 \text{ или } j = 0, \\ f(i - 1, j - 1) + 1, & \text{если } s_i = t_j, \\ \max(f(i - 1, j), f(i, j - 1)), & \text{если } s_i \neq t_j. \end{cases}$$

- Длина искомой наибольшей подпоследовательности — $f(m, n)$. Сама подпоследовательность находится обратным проходом по таблице значений f .

Редакционное расстояние (расстояние Левенштейна)

- Даны строки s и t ; $|s| = m$; $|t| = n$
- Найти кратчайшую последовательность операций вставки, удаления и замены одного символа, преобразующую s в t
- Пусть $d(i, j)$ — редакционное расстояние между s_1, \dots, s_i и t_1, \dots, t_j . Тогда

$$d(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j = 0, \\ i, & \text{если } i \neq 0, j = 0, \\ j, & \text{если } i = 0, j \neq 0, \\ \min(d(i, j - 1) + 1, \\ d(i - 1, j) + 1, \\ d(i - 1, j - 1) + (s_i \neq t_j)). \end{cases}$$

- Искомое расстояние — $d(m, n)$.

Целочисленная задача о рюкзаке

- Дан набор n вещей с весами w_1, \dots, w_n и стоимостями v_1, \dots, v_n . Дан рюкзак, вмещающий максимальный вес w .
- Найти подмножество вещей максимальной стоимости, которое можно унести в рюкзаке.
- Пусть $v(i, j)$ — максимальная стоимость набора вещей, в который входят только вещи до i -й, и вес которого не превышает j . Тогда

$$v(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 0 \text{ или } j = 0, \\ v(i-1, j), & \text{если } j < w_i, \\ \max(v(i-1, j), & \text{если } w_i \leq w \\ v(i-1, j-w_i) + v_i). & \end{cases}$$

- Стоимость искомого набора — $v(n, w)$.

Перемножение набора матриц

- Даны матрицы A_1, \dots, A_n размеров $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$.
- Найти последовательность умножений матриц в выражении $A_1 \cdots A_n$, при котором количество умножений чисел минимально.
- Пусть $m(i, j)$ — минимальное число умножений чисел, необходимое для вычисления $A_i \cdots A_j$. Тогда

$$m(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ \min_{i \leq k < j} (m(i, k) + m(k + 1, j) + p_i q_k q_j). \end{cases}$$

- Количество умножений в искомой последовательности — $m(1, n)$.

Триангуляция выпуклого многоугольника

- Дан выпуклый n -угольник с вершинами v_1, \dots, v_n и весовая функция w .
- Найти такую триангуляцию данного n -угольника, что сумма w по всем треугольникам минимальна.
- Пусть $m(i, j)$ — минимальный вес триангуляции многоугольника, построенного на вершинах i, \dots, j . Тогда

$$m(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j - i \leq 1, \\ \min_{i < k < j} (m(i, k) + m(k, j) + w(\Delta v_i v_k v_j)). & \end{cases}$$

- Вес оптимальной триангуляции — $m(1, n)$.

Замощение площадки костяшками домино




- Дана площадка размера $m \times n$ клеток и неограниченное число костяшек домино размера 1×2 .
- Найти количество способов полного замощения площадки костяшками.
- Пусть $c(i, p)$ — количество способов полностью замостить столбцы $0 \dots i - 1$ и замостить столбец i с профилем p . Тогда

$$c(i, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0 \text{ и } p = 0, \\ 0, & \text{если } i = 0 \text{ и } p \neq 0, \\ \sum_{p'} c(i - 1, p') d(p', p), & \end{cases}$$

где $d(p', p)$ — количество способов получения профиля p из профиля p' в соседних столбцах.

- Искомое количество замощений — $c(n, 0)$.

Рекомендуемая литература

-  Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.
Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос.
М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. — 384 с.: ил. // Глава 10
-  Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.
Алгоритмы: построение и анализ.
М.: МЦНМО, 1999. — 960 с., 263 ил. // Глава 16
-  Столяр С. Е., Владыкин А. А.
Информатика: Представление данных и алгоритмы.
СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,
2007. — 382 с.: ил. // Глава E